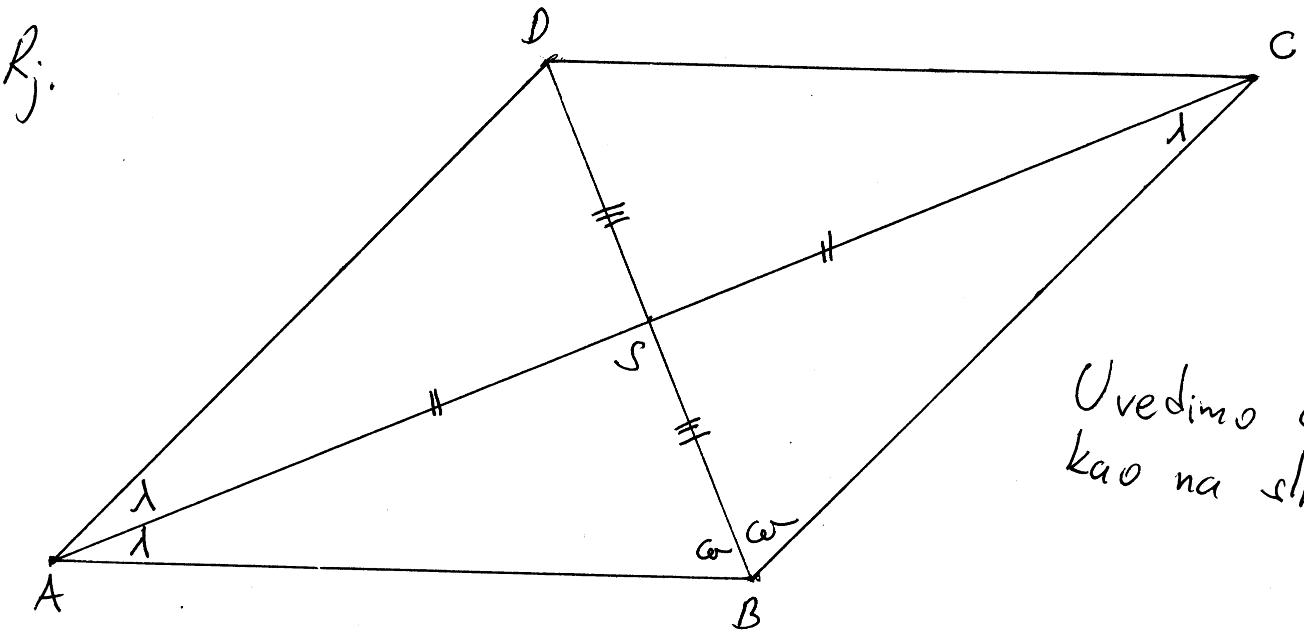
(#) Dat je romb $\square ABCD$. Pokazati da je $AC \perp BD$ i da su dijagonale ujedno i simetrale uglova romba.

Rj.



Uvedimo oznake kao na slici.

Iz osobina romba znamo $AB \cong BC \cong CD \cong AD$ i $AB \parallel CD$, $AD \parallel BC$.

$\triangle ABC$ jkk $(AB \cong BC) \Rightarrow \measuredangle BAS \cong \measuredangle BCS = \lambda$

$AB \parallel CD$ i $AD \parallel BC \Rightarrow$ romb je paralelogram $\Rightarrow$ dijagonale se polove

$$\left.\begin{array}{l} AS \cong CS \\ BS \cong BS \\ AB \cong BC \end{array}\right\} \overset{SSS}{\Longrightarrow} \triangle ABS \cong \triangle CBS$$

$\Downarrow$

$\measuredangle ASB \cong \measuredangle CSB$ a kako su ovo dva naporedna ugla $\Rightarrow AC \perp BD$

i $\measuredangle ABS \cong \measuredangle CBS = \omega \Rightarrow BD$ simetrala $\measuredangle ABC$ q.e.d.

Sad imamo

$$\left.\begin{array}{l} AS \cong AS \\ AB \cong AD \\ BS \cong DS \end{array}\right\} \overset{SSS}{\Longrightarrow} \triangle ASD \cong \triangle ASB$$

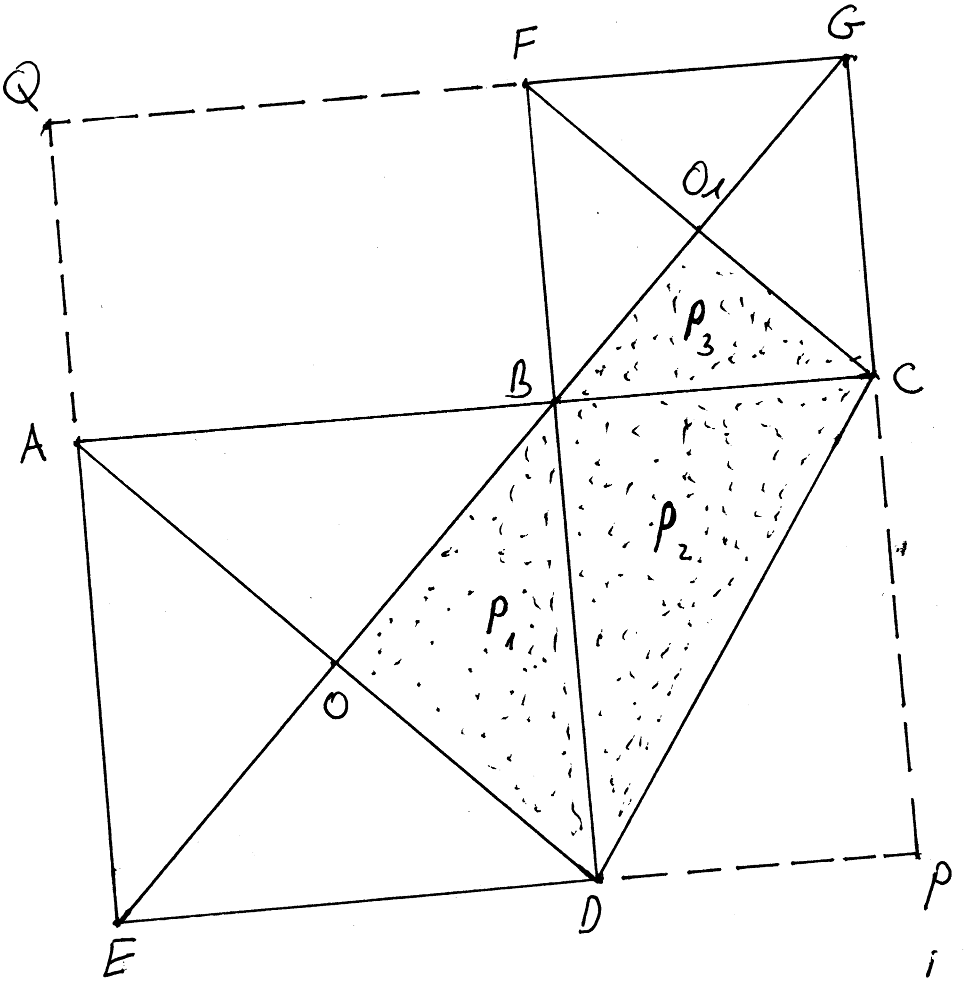
$\Downarrow$

$\measuredangle BAS \cong \measuredangle SAD = \lambda \Rightarrow AC$ simetrala $\measuredangle BAD$.

Na sličan način bi pokazali da je BD simetrala $\measuredangle ADC$ i AC sim $\measuredangle BCD$.

Duž $AC = a$ svojom unutrašnjom tačkom B podjeljena je u odnosu $3:2$. Nad dužima AB i BC, sa raznih strana u odnosu na duž AC, konstruisani su kvadrati $\square ABDE$ i $\square CBFG$. Neka su O i O_1 presjeci dijagonala ovih kvadrata. U kojoj razmjeri stoje površina četverougla OO_1CD i površina kvadrata kome je stranica duž AC?

Rj.



Formirajmo kvadrat koji će sadržavati dva data kvadrata i uvedimo oznake kao na slici iznad. Primjetimo da je $AC \cong QG \cong EP \cong GP \cong QE$

P_1 je $\frac{1}{4}$ površine kvadrata $\square AEDB$

P_2 je $\frac{1}{4}$ površine $P_{\square DPCB} + P_{\square ABFQ}$

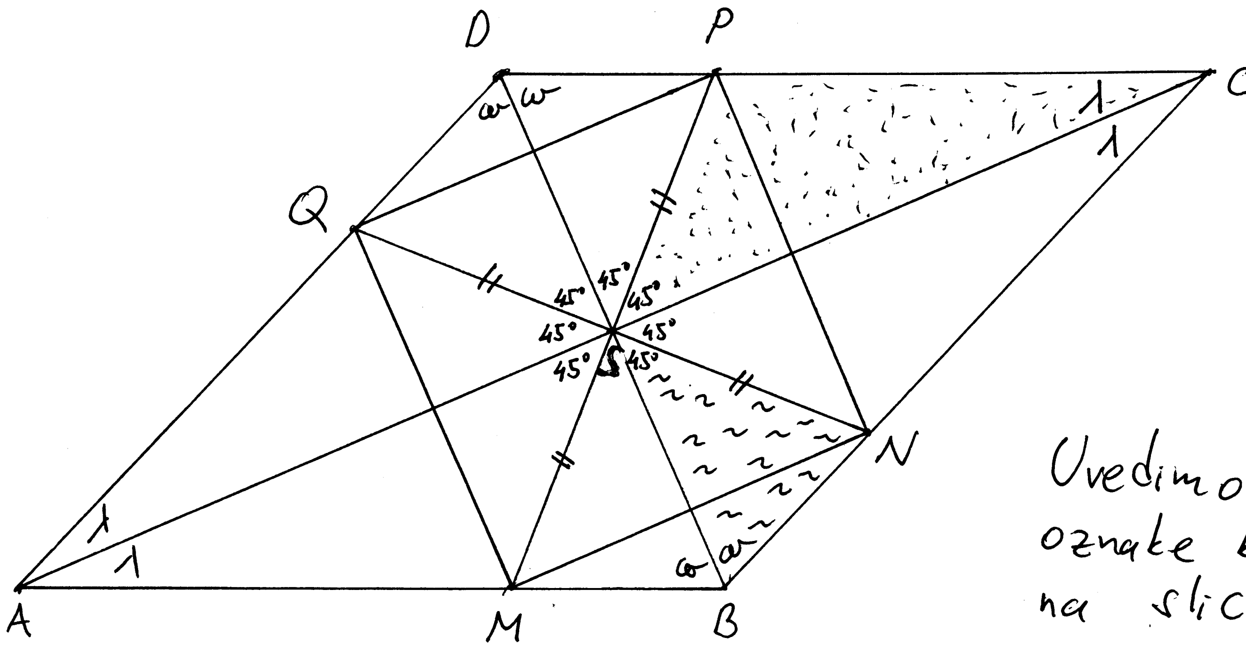
P_3 je $\frac{1}{4}$ površine kvadrata $\square BCGF$

Kako je $P_{\square EPGQ} = P_{\square AEDB} + (P_{\square DPCB} + P_{\square ABFQ}) + P_{\square BCGF}$ to je

$$P_{\square EPGQ} : P_{\square ODCO_1} = 4 : 1$$

(#) Dat je romb $\square ABCD$. Simetrale uglova između dijagonala romba sijeku stranice AB, BC, CD, DA redom u tačkama M, N, P i Q. Pokazati da je četverougao $\square MNPQ$ kvadrat.

Rj.



Uvedimo oznake kao na slici.

Znamo da se dijagonale romba polove pod pravim uglom, pa simetrale uglova između dijagonala sa stranicom grade ugao od 45°. Isto tako znamo da su dijagonale romba ujedno i simetrale uglova romba pa je

$\measuredangle SAB \cong \measuredangle SAQ \cong \measuredangle SCN \cong \measuredangle SCP = \lambda$

i $\measuredangle SBA \cong \measuredangle SBC \cong \measuredangle SDA \cong \measuredangle SDC = \omega$.

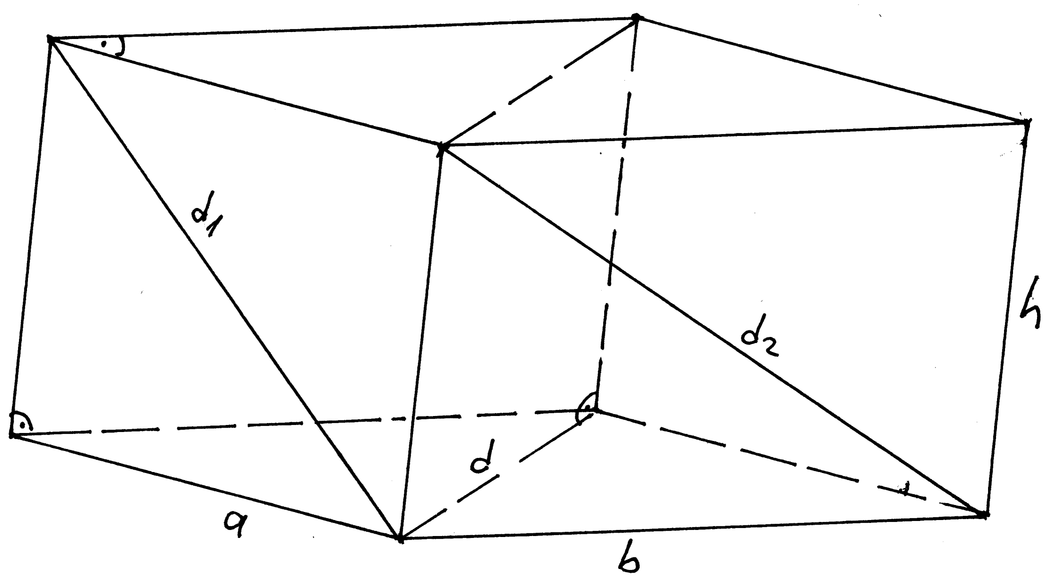
Posmatrajmo $\triangle SPC$ i $\triangle SNC$

$$\left.\begin{array}{l} \measuredangle NSC \cong \measuredangle PSC = 45^\circ \\ SC \cong SC \\ \measuredangle SCN \cong \measuredangle SCP \end{array}\right\} \overset{USU}{\Longrightarrow} \triangle SPC \cong \triangle SNC \Downarrow PS \cong SN$$

Na osnovu istog pravila (USU) nije teško vidjeti da je $\triangle BSN \cong \triangle BMS$, $\triangle AMS \cong \triangle ASQ$ iz čega slijedi da se dijagonale polove i da su jednake. Kako se još sijeku pod pravim uglom $\Rightarrow \square MNPQ$ je kvadrat

(#) Osnovne ivice kvadra (pravouglog paralelepipeda) odnose se kao 4:3, dijagonale bočnih strana odnose se međusobno kao $\sqrt{20}:\sqrt{13}$ a površina dijagonalnog presjeka odnosi se prema zapremini (volumenu) kvadra kao 2:1. Izračunati površinu i zapreminu ovog kvadra.

Rj.



Uvedimo oznake kao na slici. Iz datih razmjera dobijamo proporcije

$$a:b = 4:3 \quad \dots (1)$$

$$d_1 : d_2 = \sqrt{20} : \sqrt{13}$$

$$dh : abh = 2:1$$

$$\boxed{\begin{aligned} P &= 2ab + 2ah + 2bh \\ &= \frac{325}{144} \\ V &= abh = \frac{125}{576} \end{aligned}}$$

Odavde imamo $\frac{d_1^2}{d_2^2} = \frac{20}{13} \Rightarrow \frac{a^2+h^2}{b^2+h^2} = \frac{20}{13} \quad \dots (3)$

i $\frac{d}{ab} = \frac{2}{1} \Rightarrow \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{ab} = \frac{2}{1} \Rightarrow \frac{a^2+b^2}{a^2b^2} = \frac{4}{1} \quad \dots (2)$

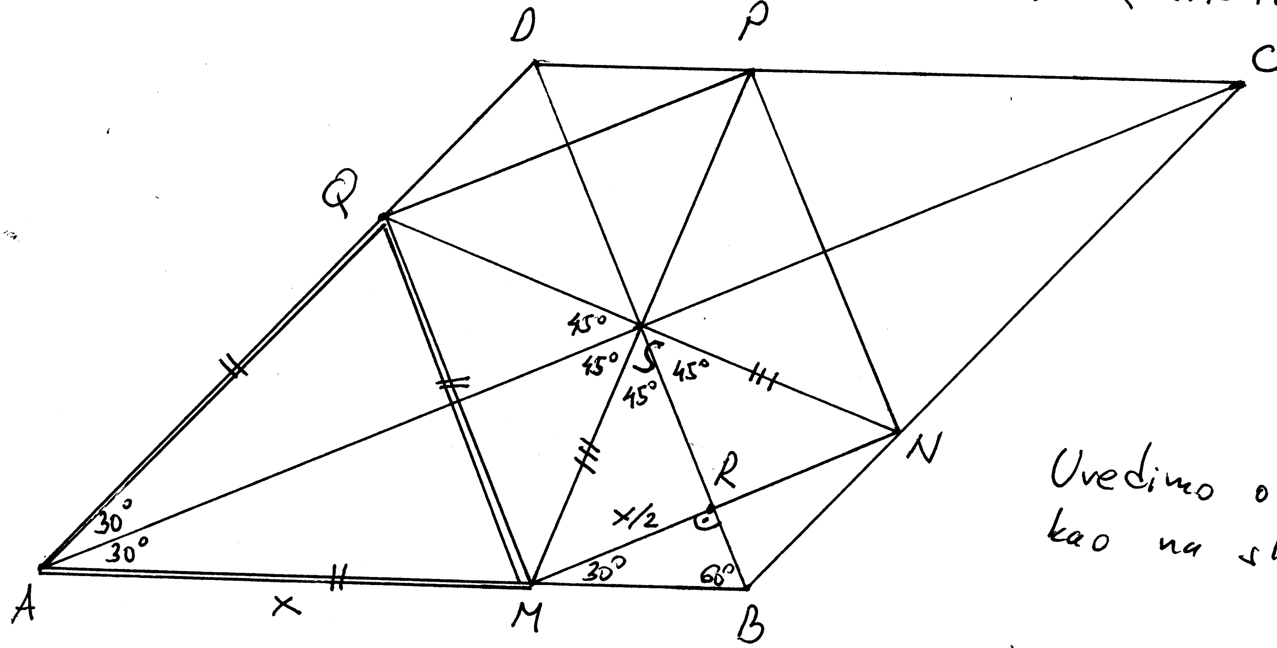
Na osnovu (1) i (2) $\Rightarrow$ $4b = 3a$ i $a^2+b^2 = 4a^2b^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow a^2 + \frac{9a^2}{16} = \frac{9a^4}{4} \Rightarrow a^2 = \frac{25}{36} \Rightarrow a = \frac{5}{6} \Rightarrow b = \frac{5}{8}$

Sad iz (3) dobijamo $\frac{\frac{25}{36}+h^2}{\frac{25}{64}+h^2} = \frac{20}{13} \Rightarrow h^2 = \frac{25}{144} \Rightarrow h = \frac{5}{12} \Rightarrow$

\# Dat je romb $\square ABCD$ sa uglom $\sphericalangle BAD = 60°$. Simetrale uglova između dijagonala sijeku stranice AB, BC, CD i DA romba, redom u tačkama M, N, P i Q. Pokazati da je $AM : MB = \sqrt{3} : 1$. (ako znamo da je $\square MNPQ$ kvadrat)

Rj:



Uvedimo oznake kao na slici.

Prema ranije urađenom zadatku znamo da je $\square MNPQ$ kvadrat, i da je $\sphericalangle ASM = \sphericalangle ASQ = 45°$. Posmatrajmo ΔAMS i ΔAQS

$$\left.\begin{array}{c} \sphericalangle MAS \cong \sphericalangle QAS = 30° \\ AS \cong AS \\ \sphericalangle ASM \cong \sphericalangle ASQ = 45° \end{array}\right\} \overset{USU}{\Longrightarrow} \Delta AMS \cong \Delta AQS \Rightarrow AM \cong AQ$$

Kako je još $\sphericalangle MAQ = 60° \Rightarrow \Delta AMQ$ jednakostranični trougao

Označimo dužinu AM sa x (iz čega slijedi $QM = x = MN$)

Neka je $\{R\} = MN \cap BS$. Kako R pripada simetrali $\sphericalangle MSN$ jednakokrakog trougla $\Delta MNS \Rightarrow R$ sredina $MN \Rightarrow MR = \frac{x}{2}$.

Iz podudarnosti trouglova ΔMSR i $\Delta NSR \Rightarrow \sphericalangle MRS \cong \sphericalangle NRS = 90°$.

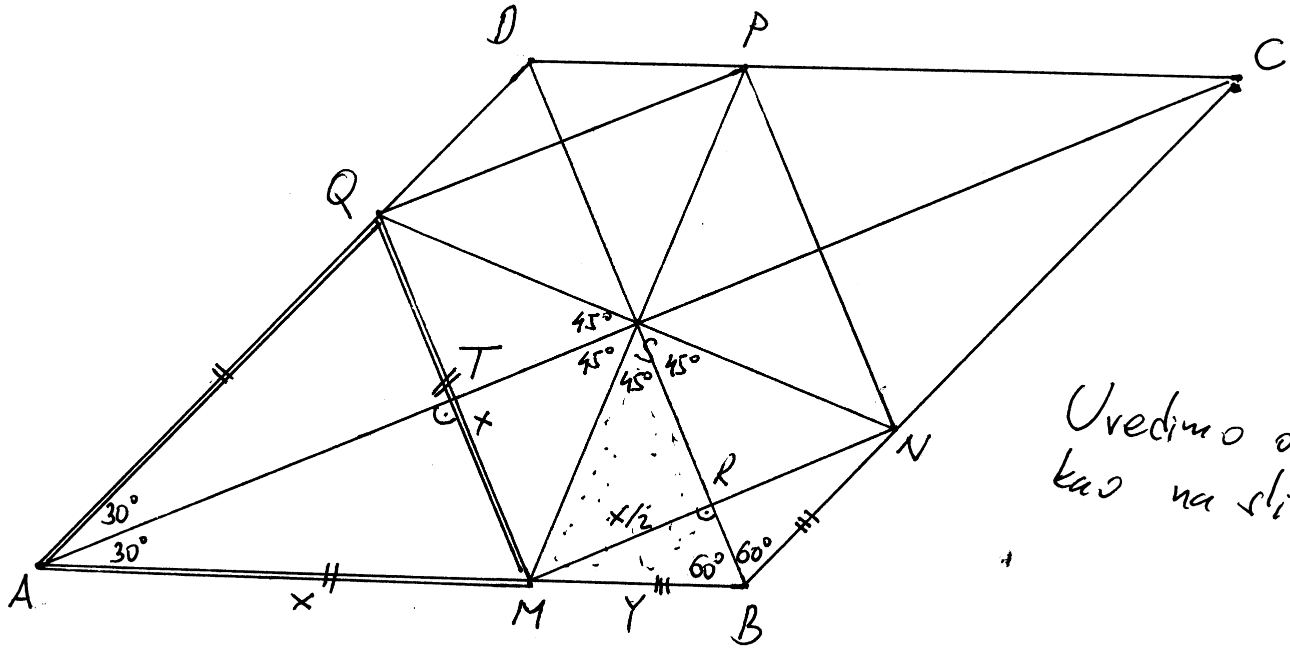
Kako je u rombu $\square ABCD$, $\sphericalangle BAD = 60° \Rightarrow \sphericalangle ABC = 120° \Rightarrow \sphericalangle MBS = 60°$

pa je $\sphericalangle NMB = 30°$, $\cos 30° = \frac{MR}{MB} \Rightarrow MR = \frac{\sqrt{3}}{2} MB$ tj. $\frac{x}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} MB$

$\Rightarrow \frac{AM}{MB} = \sqrt{3}$ tj. $AM : MB = \sqrt{3} : 1$.

(#) Dat je romb □ABCD. Simetrale uglova između dijagonala sijeku stranice romba u tačkama M, N, P i Q. Ako je $\measuredangle BAD = 60°$, $AM:MB=\sqrt{3}:1$ i □MNPQ kvadrat, nađi razmjeru onih odsječaka veće i manje dijagonale romba, koji leži van četverougla □MNPQ.

Rj.



Uvedimo oznake kao na slici.

Iz osobina romba znamo da je dijagonala ujedno i simetrala ugla i da su dijagonale okomite (i da se polove).
Prema podudarnosti USU imamo $\Delta AMS \cong \Delta AQS$ a kako je $\measuredangle MAQ = 60°$ $\Rightarrow$ ΔAMQ jks

$$\Downarrow$$
$$AM \cong AQ$$

Uvedimo oznake $AM = x$ i $MB = Y$. Prema postavci zadatka znamo da je $\frac{x}{Y} = \sqrt{3}$ $\Rightarrow$ $Y = \frac{1}{\sqrt{3}} x$.

Prema podudarnosti USU $\Rightarrow$ $\Delta MBS \cong \Delta NBS$ pa imamo

$$\Downarrow$$
$$MB \cong NB$$

$$\left.\begin{matrix} MB \cong NB \\ \measuredangle MBR \cong \measuredangle NBR = 60° \\ BR \cong BR \end{matrix}\right\} \xRightarrow{SUS} \Delta MBR \cong \Delta NBR$$

$$\Downarrow$$

$\measuredangle MRB \cong \measuredangle NRB$ (a kako su ovo dva naporedna ugla oni su pravi uglovi) i $MR = \frac{x}{2}$

$$BR^2 = Y^2 - \left(\frac{x}{2}\right)^2 = \frac{x^2}{3} - \frac{x^2}{4} = \frac{1}{12}x^2, \quad AT^2 = x^2 - \frac{x^2}{4} = \frac{3x^2}{4} \Rightarrow \frac{AT}{BR} = \frac{\frac{\sqrt{3}x}{2}}{\frac{x}{2\sqrt{3}}} = \frac{3}{1}$$